数理解析研究所講究録
第 1623 巻 2009 年 30-34

複素ユークリッド平面内のラグランジュ曲面の面積についての不等式

筑波大学・数理物質科学研究科　守屋克洋 (Katsuhiro Moriya)
Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 序

(z_0, z_1) を $\mathbb{C}^2$ の標準的な正則座標とするとき,

$$\omega = -\frac{i}{2}(\mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 + \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1)$$

は標準的なシンプレクテイック構造である. 複素構造を J^M とするリーマン面 (M, J^M) から $(\mathbb{C}^2, \omega)$ への弱共形はめ込み $\psi\colon (M, J^M) \to (\mathbb{C}^2, \omega)$ を曲面という. 曲面で $\psi^*\omega = 0$ であるものをラグランジュ曲面であるという. $\{\psi_t\colon M_t \to \mathbb{C}^2\}$ を ψ の変形族とする. $\psi_0 = \psi$ である. $\{\psi_t\}$ にたいして, M_t 上の滑らかな関数 H_t があって

$$\psi_t^*\left(\frac{\mathrm{d}\psi_t}{\mathrm{d}t} \lrcorner\, \omega\right) = \mathrm{d}H_t$$

となるとき, $\{\psi_t\}$ はハミルトン変形であるという. 二つのラグランジュ曲面 ξ と η は, それらを結ぶハミルトン変形 $\{\psi_t\}$, $\psi_0 = \xi$, $\psi_1 = \eta$ が存在するとき, ハミルトン的アイソトピックであるという. $\mathcal{A}$ を面積汎関数とする.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}(\psi_t)\right|_{t=0} = 0$$

が ψ の任意のハミルトン変形 $\{\psi_t\}$ でなりたつとき, ψ はハミルトン的極小であるという.

写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (r_1 e^{xi}, r_2 e^{yi})$ $(r_1, r_2 > 0)$ を輪環面とみなすとき, f を等質輪環面という.

Oh は, 曲面は埋め込まれているという仮定の下で, 埋め込まれた等質輪環面 f は, それとハミルトン的アイソトピックなもののなかで面積極小であり, 等質輪環面 f のハミルトン的変形の, f における面積の第二変分が零になるのは, 変分ベクトル場が $\mathbb{C}^2$ の正則等長無限小変換の f による引き戻しとなる場合であることを示している (Oh [5]). そこで Oh は次の予想を提示した.

予想 (Oh [5]). 埋め込まれた標準輪環面はそれとハミルトン的にアイソトピックなもののなかで面積最小である.

この予想について, 弱共形はめ込みの範疇で曲面の四元数的形式主義を用いて考える (Bursatall, Ferus, Leschke, Pedit, and Pinkall [1], Ferus, Leschke, Pedit, and Pinkall [2], Pedit and Pinkall [6]). 最初にやるべきことは, 等質輪環面の特徴づけである. 四元数的形式主義では, 曲面は, リーマン面上の四元数的自明直線束の四元数的接続の平行切断とみなす. この四元数的接続を用いてハミルトン的極小ラグランジュ輪環面が等質輪環面になるための次の条件を得た.

定理 1.1 ([4]). ハミルトン極小ラグランジュ輪環面の四元数的接続が平坦であり, その反正則構造が四元数的自明接続の反正則構造と一致するならば, そのハミルトン極小ラグランジュ輪環面は等質輪環面である.

より一般のラグランジュ曲面に対しては, 接続を用いて面積についての不等式が得られる. 本稿ではこれらの概略を述べる.

2 四元数的形式主義

2.1 右法ベクトル

$\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{H}$ を $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$ で同一視する. ここで,

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \;\; jk = -kj = i, \;\; ki = -ik = j,$$

である. このとき, 次が成り立つ.

補題 2.1. $\psi\colon (M, J^M) \to \mathbb{H}$ にたいして, ψ がラグランジュ曲面であることと, $\beta\colon M \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ があって,

$$*(\mathrm{d}\psi) := (\mathrm{d}\psi) \circ J^M = -(\mathrm{d}\psi)e^{-\beta i}j$$

となることが同値である (Hélein and Romon [3]). さらに ψ がハミルトン極小であることと β が調和的であることが同値である.

$e^{-\beta i}j\colon M \to \mathbb{H}$ を ψ の右法ベクトルという.

2.2 四元数的平坦接続

$\psi\colon M \to \mathbb{H}$ を $e^{-\beta i}j$ を右法ベクトルとするラグランジュ曲面とする. $\underline{\mathbb{H}} = M \times \mathbb{H}$ を左四元数的自明直線束とする. このとき M から $\mathbb{H}$ への滑らかな写像全体は, $\underline{\mathbb{H}}$ の滑らかな切断全体 $\Gamma(\underline{\mathbb{H}})$ と同一視される. M を閉リーマン面とし, ψ が 0 にならないように平行移動し, 四元数的接続 $\nabla\colon \Gamma(\underline{\mathbb{H}}) \to \Gamma(T^*M \otimes \underline{\mathbb{H}})$ を

$$\nabla\psi = 0, \quad \nabla(\lambda\psi) = (\mathrm{d}\lambda)\psi$$

で定義する. ここで, $\lambda\colon M \to \mathbb{H}$ である. ∇ を ψ の接続とよぶ. 任意の $\phi \in \Gamma(\underline{\mathbb{H}})$ にたいして, $\nabla\phi = \mathrm{d}\phi + \phi\omega$ となる四元数値一次微分形式 ω を ∇ の接続形式とよぶ. ∇ は平坦であり, $\mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega = 0$ となる.

2.3 複素構造による分解 I

$J \in \Gamma(\mathrm{End}(\underline{\mathbb{H}}))$ を $J\phi = -\phi e^{-\beta i}j$ ($\phi \in \Gamma(\underline{\mathbb{H}})$) で定義する. J を ψ の複素構造という. この複素構造により ψ の接続 ∇ を次のように分解する.

$$\nabla = \nabla' + \nabla'',$$
$$*\nabla'\phi = J\nabla'\phi, \quad *\nabla''\phi = -J\nabla''\phi \quad (\phi \in \Gamma(\underline{\mathbb{H}})).$$

とくに,

$$\mathrm{d}''\phi = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{d}\phi) + *(\mathrm{d}\phi)e^{-\beta i}j\right]$$

であるから, 次が成り立つ.

補題 2.2. ∇ を曲面 ϕ の接続とする. ϕ が, 右法ベクトルが $e^{-\beta i}j$ であるラグランジュ曲面であることと, $\nabla'' = \mathrm{d}''$ であることが同値である.

これより, ∇ と $\tilde{\nabla}$ をそれぞれ右法ベクトルが同じラグランジュ曲面 ψ, $\tilde{\psi}$ の接続であるとするとき, $\nabla' \neq \tilde{\nabla}'$ ならば, $\psi \neq \tilde{\psi}$ である. 逆は必ずしも正しくない.

2.4 複素構造による分解 II

∇' を複素構造 J により, 次のように分解する.

$$\nabla' = \partial^{\nabla} + A^{\nabla},$$

$$J\partial^{\nabla}\phi = \partial^{\nabla} J\phi, \quad JA^{\nabla}\phi = -A^{\nabla} J\phi \quad (\phi \in \Gamma(\underline{\mathbb{H}})).$$

∂^{∇} は $\underline{\mathbb{H}}$ を複素ベクトル束 $E \oplus jE \cong E \oplus E$ とみなしたときの反正則構造となる．ここで，$E = \{\phi \in \underline{\mathbb{H}} \mid J\phi = i\phi\}$ であり，∂^{∇} が反正則構造であるとは，

$$\partial^{\nabla}(\lambda\phi) = (\partial\lambda)\phi + \lambda(\partial^{\nabla}\phi)$$

が任意の $\phi \in \Gamma(\underline{\mathbb{H}})$ と任意の $\lambda\colon M \to \mathbb{C}$ にたいして成り立つことである．

定理 1.1 は，あるハミルトン極小ラグランジュ輪環面の四元数的接続 ∇ が平坦であり，$\partial^{\nabla} = \partial^{\mathrm{d}}$ を満たすならば，そのハミルトン極小ラグランジュ輪環面は等質輪環面であると主張する．

3　不等式

この節では $\phi\colon M \to \mathbb{H}$ を右法ベクトルが $e^{-\beta i}j$ であるラグランジュ曲面であるとし，∇ をその接続，ω をその接続形式とする．このとき，M 上の複素数値微分形式 ω_0 が存在して，

$$\omega = \omega_0 + *\omega_0 e^{-\beta i}j$$

と書ける．$(\mathrm{d}\phi) = -\phi\omega$ であり，

$$\mathcal{A}(\phi) = -\frac{1}{2}\int_M (\mathrm{d}\phi) \wedge (\mathrm{d}\hat{\phi})$$

であることを用いると，$r_- = \min\{|\phi(p)| \mid p \in M\}$, $r_+ = \max\{|\phi(p)| \mid p \in M\}$ とおいて

$$-r_-^2 \int_M \omega_0 \wedge *\bar{\omega}_0 \leq \mathcal{A}(\phi) \leq -r_+^2 \int_M \omega_0 \wedge *\bar{\omega}_0$$

を得る．等号は $|\phi| = r_- = r_+$ のときすなわち，ϕ が三次元球面内の曲面である場合に成り立つ．このとき，ϕ は等質輪環面になることが分かる．従って，ϕ が等質輪環面ではない場合は，

$$-r_-^2 \int_M \omega_0 \wedge *\bar{\omega}_0 < \mathcal{A}(\phi) < -r_+^2 \int_M \omega_0 \wedge *\bar{\omega}_0$$

である．もし，ϕ が等質輪環面 ψ のハミルトン変形であるとき，

$$\mathcal{A}(\psi) < -r_-^2 \int_M \omega_0 \wedge *\bar{\omega}_0$$

がなりたつならば，Oh 予想が成り立つ．

参考文献

[1] Burstall, Francis E., Dirk Ferus, Katrin Leschke, Franz Pedit, and Ulrich Pinkall. *Conformal Geometry of Surfaces in S^4 and Quaternions.* Lecture Notes in Mathematics 1772. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[2] Ferus, Dirk, Katrin Leschke, Franz Pedit, and Ulrich Pinkall. "Quaternionic Holomorphic Geometry: Plücker Formula, Dirac Eigenvalue Estimates and Energy Estimates of Harmonic 2-Tori." *Invent. Math.* 146, no. 3 (2001): 507–593.

[3] Hélein, Frédéric and Pascal Romon. "Hamiltonian Stationary Lagrangian Surfaces in $\mathbb{C}^2$." *Comm. Anal. Geom.* 10, no. 1 (2002): 79–126.

[4] Moriya, Katsuhiro. "A flat quaternionic connection for a Hamiltonian stationary Lagrangian torus in the complex Euclidean plane." preprint. arXiv:0710.4233v5.

[5] Oh, Yong-Geun. "Volume Minimization of Lagrangian Submanifolds under Hamiltonian Deformations." *Math. Z.* 212, no. 2 (1993): 175–192.

[6] Pedit, Franz and Ulrich Pinkall. "Quaternionic Analysis on Riemann Surfaces and Differential Geometry." in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998).* Extra Volume II, *Doc. Math.* (1998): 389–400. http://www.emis.de/journals/DMJDMV/xvol-icm/ICM.html .